L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
Mars 2017

Feuille de TD 6
Séries entières

Exercice 1. Pour $a > 0$ déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\ln(\operatorname{ch}(an))}$.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n^{\sqrt{n}} z^n$.

Exercice 3. Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ où pour tout $n \geqslant 1$, a_n est la somme de tous les diviseurs de n.

Exercice 4. On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{2n+1}$.

1. Déterminer son rayon de convergence R.
2. Pour $z = R$ et $z = -R$ la série converge-t-elle ?
3. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$ calculer, en distinguant les cas $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$, la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

Exercice 5. Pour $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle, non identiquement nulle $F \neq 0$, et $\sum_n a_n z^n$ une série entière dont on note R le rayon de convergence, montrer que la série entière $\sum_n a_n F(n) z^n$ possède le même rayon de convergence R.

Exercice 6.

1. Développer en série entière en 0 la fonction $g(x) = \frac{\sin(\alpha)}{1-2x\cos(\alpha)+x^2}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.
2. En déduire le développement en série entière en 0 de la fonction $f(x) = \arctan\left(\frac{x\sin(\alpha)}{1-x\cos(\alpha)}\right)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

Exercice 7. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} U_n$ où pour tout n, U_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $U_n(x) = (x + x^2)^n$.

1. Etudier le domaine de convergence noté $\mathscr{D}$ de la série $\sum_{n\geqslant 0} U_n$. On note U la fonction limite.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(2x+1)(x+x^2)^n = \frac{2x+1}{(1-x-x^2)^2}.$$
3. Montrer que U est développable en série entière en 0.

Exercice 8. On considère la série entière $\sum_n a_n x^n$ où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+2} = ua_{n+1} + va_n$, avec u et v deux réels positifs.

1. Justifier que la série entière possède un rayon de convergence strictement positif.
2. Calculer au voisinage de 0 la somme totale, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. En déduire pour tout $n \geqslant 0$, a_n en fonction de n.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n$. Le but est de déterminer u_n sous forme d'une somme $\sum_{k=\ldots}^{\ldots} \ldots$

1. Montrer que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \frac{x^{n+2}}{n+2}$ possède un rayon de convergence R strictement positif.
2. On définit alors pour tout $|x| < R$, la fonction somme $g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^{n+2}}{n+2}$. Montrer que g vérifie l'équation différentielle $g'(x)(1-x) = 2xg(x) + x$.
3. En déduire g puis u_n sous forme d'une somme finie.

Exercice 10. Développer en série entière en 0 la fonction $f(x) = \mathrm{ch}(2x)\cos(2x)$ en utilisant une équation différentielle d'ordre 4.

Exercice 11. Développer en série entière en 0 la fonction $f(x) = \sin^2(x)\,\mathrm{sh}^2(x)$.

Exercice 12. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0,$$

d'inconnue une fonction y deux fois dérivable sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) développables en série entière en 0.
2. Par le changement de variable $x = t^2$, résoudre (E) sur $I =]0, +\infty[$.
3. Résoudre de façon similaire (E) sur $I =]-\infty, 0[$.
4. Quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13. On considère J la fonction suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(x\sin(t)\right) \mathrm{d}t.$$

1. Justifier que J est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin\left(x\sin(t)\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2(t)\cos\left(x\sin(t)\right) \mathrm{d}t$$

3. En déduire que J est solution de l'équation différentielle

$$xJ'' + J' + xJ = 0.$$

4. Montrer que J est développable en série entière en 0 et calculer son développement.